第32講　整数問題(3)

1　自然数 n に対し，$a_n=2^{3n+3}-3^{n+1}$ とおく．すべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものを求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　２つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$$a_1=4,\ b_1=3,\ a_{n+1}=4a_n-3b_n,\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2)　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに５の倍数であることを証明せよ．

(3)　a_n も b_n も５の倍数ではないことを証明せよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直角三角形 ABC は，∠C が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2)　tan∠A と tan∠B は，いずれも整数にならないことを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 32 講　整数問題(3)

整数　$a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めたい．

$a_1=$ **アイ** ，$a_2=$ **ウエオ** より，すべての a_n を割り切る可能性がある素数は **カ** のみ．よって求める素数は カ であると予想される．a_k が カ で割り切れると仮定すると，

$a_{k+1}=$ **キク** $\times(-1)^k2^{4k-3}+$ **ケコ** a_k より，a_{k+1} も カ で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は カ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　整数問題(3)

1　自然数 n に対し，$a_n=2^{3n+3}-3^{n+1}$ とおく．すべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものを求めよ．

$a_1=2^6-3^2=64-9=55=5\times11$　　$a_2=2^9-3^3=512-27=485=5\times97$

よって，自然数 n に対しすべての a_n を割り切る自然数のうち最大のものは5と予想される．

$a_n=2^{3(n+1)}-3^{n+1}$

$=8^{n+1}-3^{n+1}=(8-3)(8^n+8^{n-1}\cdot3+8^{n-2}\cdot3^2+\cdots\cdots+3^n)=(5\text{の倍数})$

よってすべての a_n は5で割り切れる．したがって求める最大の自然数は **5**

2　2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が次の漸化式で与えられているとする．

$a_1=4,\ b_1=3,\ a_{n+1}=4a_n-3b_n,\ b_{n+1}=3a_n+4b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1)　a_2，a_3，a_4，b_2，b_3，b_4 を求めよ．

(2)　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数であることを証明せよ．

(3)　a_n も b_n も5の倍数ではないことを証明せよ．

(1)　$a_2=4a_1-3b_1=4\cdot4-3\cdot3=\mathbf{7}$　　$b_2=3a_1+4b_1=3\cdot4+4\cdot3=\mathbf{24}$

$a_3=4a_2-3b_2=4\cdot7-3\cdot24=\mathbf{-44}$　　$b_3=3a_2+4b_2=3\cdot7+4\cdot24=\mathbf{117}$

$a_4=4a_3-3b_3=4\cdot(-44)-3\cdot117=\mathbf{-527}$　　$b_4=3a_3+4b_3=3\cdot(-44)+4\cdot117=\mathbf{336}$

(2)「すべての自然数 n で　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数である」……①　を示す．

［Ⅰ］　$n=1$ のとき　$a_5=4a_4-3b_4=-3116$　　$b_5=3a_4+4b_4=-237$ より

$a_5-a_1=-3120=5\cdot(-624)$　　$b_5-b_1=-240=5\cdot(-48)$

よって①は成り立つ．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　①が成り立つと仮定すると

$a_{k+4}-a_k=5k$　　$b_{k+4}-b_k=5l$（k，l は整数）とおける．

このとき　$a_{k+5}-a_{k+1}=(4a_{k+4}-3b_{k+4})-(4a_k-3b_k)=4(a_{k+4}-a_k)-3(b_{k+4}-b_k)$

$=4\cdot5k-3\cdot5l=5(4k-3l)$

$b_{k+5}-b_{k+1}=(3a_{k+4}+4b_{k+4})-(3a_k+4b_k)=3(a_{k+4}-a_k)+4(b_{k+4}-b_k)$

$=3\cdot5k+4\cdot5l=5(3k+4l)$

よってともに5の倍数であり，①は $n=k+1$ のときも成り立つ．

［Ⅰ］，［Ⅱ］より　①はすべての自然数 n で成り立つ．よって示された．

(3)　(2)より　$a_{n+4}-a_n$，$b_{n+4}-b_n$ はともに5の倍数，すなわち a_{n+4} と a_n，b_{n+4} と b_n はそれぞれ5で割った余りが等しい．

a_1，a_2，a_3，a_4 および b_1，b_2，b_3，b_4 はいずれも5の倍数ではない．

したがって，すべての自然数 n で a_n も b_n も5の倍数ではない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直角三角形 ABC は，∠C が直角で，各辺の長さは整数であるとする．辺 BC の長さが 3 以上の素数 p であるとき，以下の問いに答えよ．

(1)　辺 AB，CA の長さを p を用いて表せ．

(2)　$\tan\angle A$ と $\tan\angle B$ は，いずれも整数にならないことを示せ．

(1)　$BC=p$，$AB=c$，$CA=b$（b，c は自然数）とすると，三平方の定理により

$$p^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$$

$c+b>0$，$c-b>0$ であり，$c+b>c-b$

p は素数，すなわち 1 と p 以外に約数をもたないので，p^2 を異なる 2 数の積で表す方法は $p^2\times1$ のみである．

よって　$c+b=p^2$　　$c-b=1$

したがって　$AB=c=\boldsymbol{\dfrac{p^2+1}{2}}$　　$CA=b=\boldsymbol{\dfrac{p^2-1}{2}}$

(2)　$\tan\angle A=\dfrac{p}{b}=\dfrac{2p}{p^2-1}=\dfrac{2p}{(p+1)(p-1)}$　……①

$\tan\angle B=\dfrac{b}{p}=\dfrac{(p+1)(p-1)}{2p}$　……②

p は 3 以上の素数，すなわち奇数より，$p+1$，$p-1$ は偶数．

よって①，②はともに 2 で 1 回約分できる．

その約分後に，$p+1$，$p-1$ のいずれか残った方と p は約分することができない．

よって，①の分母には　$p+1$，$p-1$（ともに偶数）のいずれかが残り，

②の分母には　p（3 以上の奇数）が残る．

したがって，$\tan\angle A$，$\tan\angle B$ はいずれも整数にならない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第32講　整数問題(3)

整数　$a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めたい．

$a_1=$ **アイ** ，$a_2=$ **ウエオ** 　より，すべての a_n を割り切る可能性がある素数は **カ** のみ．よって求める素数は カ であると予想される．a_k が カ で割り切れると仮定すると，

$a_{k+1}=$ **キク** $\times(-1)^k2^{4k-3}+$ **ケコ** a_k　より，a_{k+1} も カ で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は カ である．

$a_1=19+2=\mathbf{21}=7\times3$

$a_2=19^2+(-1)\cdot2^5=\mathbf{329}=7\times47$

よって　a_n のすべてを割り切る可能性がある素数は **7** のみである．

［Ⅰ］　$a_1=7\times3$　より　a_1 は 7 で割り切れる．

［Ⅱ］　$n=k$ のとき　a_n が 7 で割り切れる．つまり $a_k=19^k+(-1)^{k-1}2^{4k-3}$ が 7 の倍数であると仮定すると，$19^k=a_k-(-1)^{k-1}2^{4k-3}=a_k+(-1)^k2^{4k-3}$　より

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=19^{k+1}+(-1)^k\cdot2^{4k+1}\\
&=19\cdot19^k+16\times(-1)^k2^{4k-3}\\
&=19\{a_k+(-1)^k2^{4k-3}\}+16\times(-1)^k2^{4k-3}\\
&=\mathbf{35}\times(-1)^k2^{4k-3}+\mathbf{19}a_k
\end{aligned}
$$

より，a_{k+1} も 7 で割り切れる．

したがって，数学的帰納法により，すべての a_n を割り切る素数は 7 である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。